Initiation à la démonstration

1) Les règles du débat mathématique

- Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux.
- Une définition est un énoncé vrai : elle sert à expliquer le sens d'un nouveau mot.
- Un énoncé mathématique qui est vrai (c'est à dire qu'il a été démontré) est appelé propriété, règle ou théorème.
- Un énoncé mathématique dont on n'est pas sûr qu'il soit vrai (c'est à dire qu'il n'a pas été démontré) est appelé une conjecture.
- Un contre exemple suffit à prouver qu'un énoncé mathématique est faux.
- Des exemples, même nombreux, ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai.
- En géométrie,
  - un dessin ne suffit pas pour justifier.
  - mesurer sur une figure ne permet pas de démontrer.
  - on évite de construire des figures particulières.

2) Des propriétés *Si ……, Alors …… :*

En mathématiques, on utilise souvent des énoncés de la forme « **Si ……, alors ……** ».
Dans ces énoncés, l'expression qui est entre le « **Si** » et le « **Alors** » est appelée la condition de l'énoncé et l'expression qui est après le « **Alors** » est appelée la conclusion de l'énoncé.

Si	***conditions***	**, alors**	***conclusion***

Observer les deux propriétés suivantes :

P_1	*Si un triangle est isocèle, **alors** ce triangle a deux angles de même mesure.*
P_2	*Si un triangle a deux angles de même mesure, **alors** ce triangle est isocèle.*

On dit que la propriété P_2 est la propriété réciproque de le propriété P_1.

Propriété :	**Si**	**……………………..**	**, alors**	**……………………..**
propriété réciproque:	**Si**	**……………………..**	**, alors**	**……………………..**

Exemples

*1) **Si** un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur, **alors** c'est un losange.*

Sa réciproque est : ***Si** un quadrilatère est un losange, **alors il** a ses quatre côtés de même longueur.*

*2) **Si** O est le milieu de [AB], **alors** OA = OB.*

Réciproque *:* **Si** OA = OB, **alors** O est le milieu de [AB].

3) Démonstration

Pour prouver ou justifier des résultats en mathématiques, on utilise des démonstrations.

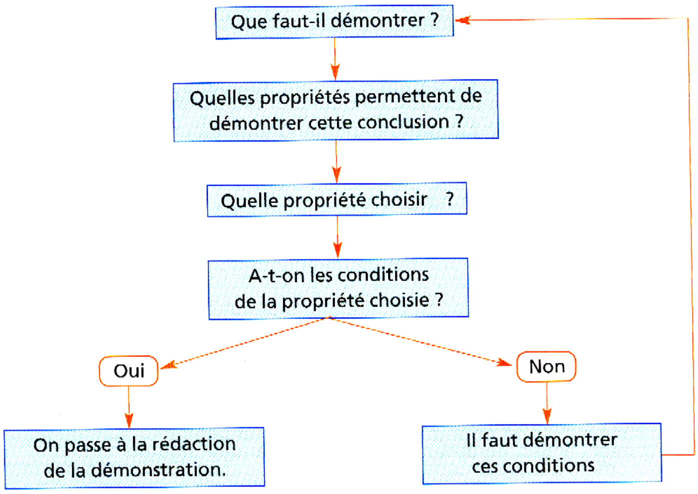
Une **démonstration** est composée de chaînons déductifs reliés les uns aux autres **qui partent des données de l'énoncé** et **arrivent à la conclusion**., en utilisant des définitions ou propriétés de cours

Un **chaînon déductif** est un enchaînement de phrases qui peut se présenter sous la forme suivante :

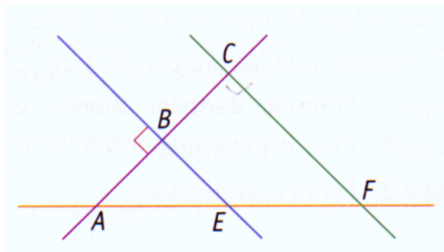
Données utiles	« On sait que ……… »
Propriété	« Si……… alors ……… »
Conclusion	« Donc……… »

a) Comment chercher une démonstration ?

Pour chercher une démonstration on peut partir des données et essayer d'en déduire des conséquences à partir de propriétés, mais **souvent il est utile d'appliquer le schéma suivant qui part de la conclusion** :



Exemple :
AFC est un triangle tel que AF = 10 cm ; AC = 8 cm et FC = 6 cm.
AB = 3 cm.
Les droites (BE) et (CF) sont parallèles.
Démontrer que les droites (AC) et (CF) sont perpendiculaires.



DONNEES UTILES	OUTILS (définitions ou propriétés)	CONCLUSIONS
(BE) // (CF) *(BE) ⊥ (AC)*	*Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*	*(AC) ⊥ (CF)*

b) Comment rédiger une démonstration ?

On sait que *(BE) // (CF) et (BE) ⊥ (AC)*

Or, *Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*
Donc *(AC) ⊥ (CF).*

c) Comment contrôler une démonstration ?

Pour contrôler la rédaction d'une démonstration on peut se poser les questions suivantes :

- Les affirmations qui suivent « On sait que » sont-elles bien des données de l'énoncé ou des conclusions de chaînons précédents ?
- Les propriétés utilisées existent-elles bien ?
- Dans chaque chaînon déductif y a-t-il bien correspondance entre les données et la condition de la propriété, ainsi qu'entre la conclusion de la propriété et la conclusion du chaînon ?